CEVAP ANAHTARI

Adı-Soyadı: **25.05.2018**

Numarası:

Fen – Edb. Fak. Mat. Bölümü Diferansiyel Geometri II Final Sınav Soruları

1. $M=\{(x,y,z)\in E^3 : z=x^2+y^2\}$ kümesi için

a. E^3 de yüzey olduğunu gösteriniz.

b. $P=(1,1,2)$ noktasındaki teğet düzleminin denklemini bulunuz.

2. M, E^n de bir hiperyüzey olsun. M nin S şekil operatörü kavramını tanımlayınız ve lineer olduğunu gösteriniz.

3. Yönlendirilebilir yüzey kavramını açıklayınız. Yönlendirilebilen ve yönlendirilemeyen yüzeylere örnekler veriniz.

4. Bertrand eğri çiftlerinin karşılıklı noktalardaki birim teğet vektörler arasındaki açının sabit olduğunu gösteriniz.

5. Bir eğrinin teğetler göstergesini tanımlayınız ve denklemini yazınız.

6. $M=\{(x,y,z)\in E^3 : y^2+z^2=1\}$ silindiri üzerinde bir $\alpha(t)=(t,\cos t,\sin t)$ eğrisi veriliyor. Bu α eğrisinin, M yüzeyi üzerindeki geodezikliğini araştırınız.

7. $X=(x_1,x_2,x_3)$, $Y=(y_1,y_2,y_3)$, $Z=(z_1,z_2,z_3)\in\mathbb{R}^3$ için

$$f(X,Y,Z)=x_1x_3y_2-x_2y_1z_3$$

fonksiyonu bir tensör müdür, araştırınız.

NOT: 1. Soru 20 puan, 3. ve 5. Soru 10 puan diğerleri 15 puandır.

Başarılar

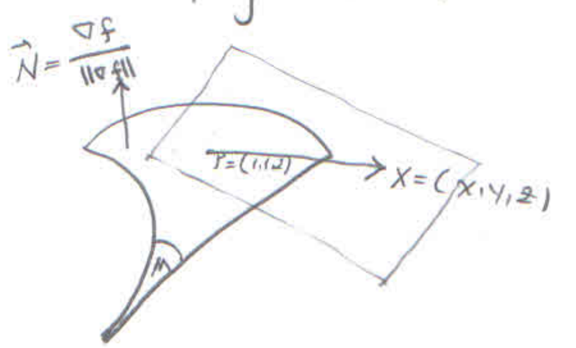
Prof. Dr. Emin KASAP

1- a) $M = \{(x,y,z) \in E^3 \mid z = x^2+y^2\}$ kümesi için

$f(x,y,z) = x^2+y^2-z=0$ dersek $\forall P=(x,y,z) \in E^3$ için

$\nabla f\big|_P = (2x, 2y, -1) \neq 0$ elde edilir. Bunun anlamı

M kümesinin her noktada gradient vektörü sıfırdan farklıdır. Öyleyse M, E^3 de bir yüzey belirtir.

b) 

$X = (x,y,z)$ düzlem üzerinde temsili bir nokta olmak üzere

$\vec{PX} = (x-1, y-1, z-2)$

$\vec{N}/_P = (2/3, 2/3, -1/3)$

$\Rightarrow \langle \vec{PX}, \vec{N}_{|_P} \rangle = 0$

$\Rightarrow \langle (x-1, y-1, z-2), (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}) \rangle = 0$

$\boxed{\Rightarrow 2x+2y-z-2=0 \text{ bulunur.}}$

2- Şekil Operatörü: $N = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$; M nin bir normal vektör alanı, $\chi(M)$; M nin vektör alanları uzayı, $T_M(P)$; M nin P noktasındaki tanjant uzayı ve D, E^n de Riemann konneksiyonu olmak üzere

$$S: \chi(M) \to \chi(M)$$
$$X \to D_X N = (X[a_1], X[a_2], \ldots, X[a_n])$$ veya bir

P noktasındaki $S_P: T_M(P) \to T_M(P)$

$$X_P \to D_{X_P} N_P = (X_P[a_1], X_P[a_2], \ldots, X_P[a_n])$$

değeri ile tanımlı S dönüşümüne M nin şekil operatörü, S_P ye P noktasındaki şekil operatörü veya Weingarten dönüşümü denir.

S lineerdir: $\forall X, Y \in \mathcal{X}(M)$ için ve $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için

$$S(aX+bY) = D_{aX+bY} N$$

↓ D Riemann konneksiyon özelliğinden

$$= a D_X N + b D_Y N$$

$= a S(X) + b S(Y)$ elde edilir, ki bu da S nin lineer olduğunu gösterir.

3- Yönlendirilebilir Yüzey: M hiperyüzeyi üzerinde diferansiyellenebilir bir birim normal vektör alanı varsa M hiperyüzeyine yönlendirilebilir hiperyüzey denir.

* Düzlem, küre, silindir yönlendirilebilir yüzeylere örnektir

* Möbius şeridi, klein şişesi ve projektif düzlem yönlendirilemeyen yüzeylere birer örnektir.

4- α ve β Bertrand eğri çiftleri olmak üzere karşılıklı noktalarındaki teğet vektörleri T ve T^* ile gösterilsin. Bu vektörler arasındaki açı θ ise, o zaman

$\langle T, T^* \rangle = \|T\| \, \|T^*\| . \cos\theta$ yazılır. Burada

$$\frac{d}{ds} \langle T, T^* \rangle = \langle \frac{dT}{ds}, T^* \rangle + \langle T, \frac{dT^*}{ds} \rangle$$

$$= \langle \kappa N, T^* \rangle + \langle T, \kappa^* N^* \frac{ds^*}{ds} \rangle$$

$= \kappa \langle N, T^* \rangle + \kappa^* \frac{ds^*}{ds} \langle T, N^* \rangle$ bulunur. α ve β Bertrand eğri çifti olduğundan $\{N, N^*\}$ lineer bağımlı olup

$\langle N, T^* \rangle = 0$ ve $\langle T, N^* \rangle = 0$ elde edilir.

Bunun onlamı

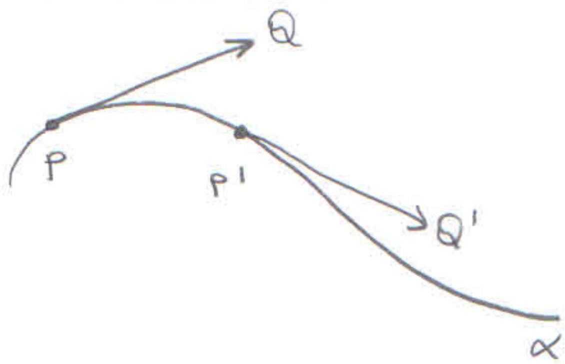
$$\frac{d}{ds} \langle T, T^* \rangle = 0$$ dır. O halde $\cos\theta = \text{sabit}$ olup $\theta = \text{sabit}$ elde edilir.

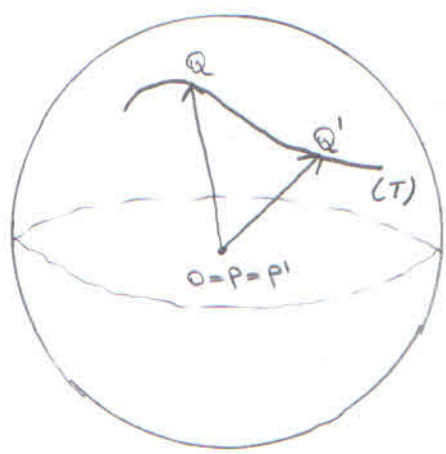
5- Teğetler göstergesi: E^3 de bir α eğrisi $s \in I$ yay parametresi ile verilsin. α'nın birim teğet vektörü T olmak üzere $\vec{PQ} = T$ alındığında, P noktası α eğrisini çizerken Q noktasının birim küre yüzeyi üzerinde çizdiği eğriye α nın 1. küresel göstergesi veya teğetler göstergesi denir.

α eğrisinin teğetler göstergesi

$$\alpha_T : I \longrightarrow S^2 \quad , \quad \alpha_T = T$$

şeklinde tanımlanır.





6- $M = \{ (x,y,z) \in E^3 \mid y^2 + z^2 = 1 \}$ silindiri üzerindeki $\alpha(t) = (t, \cos t, \sin t)$ eğrisi veriliyor. Bu α eğrisi, M üzerinde geodezik midir, araştırınız?

M yüzeyinin birim normal vektör alanı

$f(x,y,z) = y^2 + z^2 - 1 = 0$ olmak üzere

$$\vec{\nabla}_f = (0, 2y, 2z) \Rightarrow \|\vec{\nabla} f\| = \sqrt{4y^2+4z^2} = 2$$

$$\Rightarrow \vec{N} = \frac{\vec{\nabla} f}{\|\vec{\nabla} f\|} = (0, y, z) \text{ bulunur.}$$

Ayrıca α eğrisinin türev vektörleri

$$\alpha'(t) = (1, -\sin t, \cos t)$$

$$\alpha''(t) = (0, -\cos t, -\sin t) \text{ dır.}$$

Bir α eğrisinin M yüzeyi üzerinde geodezik olma şartı

$\forall t \in I$ için $\alpha''(t) = \lambda(t) N|_{\alpha(t)}$ diferansiyel denklemini sağlıyor olmasıdır.

$$N|_{\alpha(t)} = N(\alpha(t)) = (0, y(\alpha(t)), z(\alpha(t)))$$

$x_i : E^3 \to \mathbb{R}$
$P \to x_i(P) = P_i$

$$= (0, \alpha_2(t), \alpha_3(t))$$

$$= (0, \cos t, \sin t) \text{ olmak üzere}$$

$\alpha''(t) = -1 \, N|_{\alpha(t)}$ yani $\alpha''(t) \, // \, N|_{\alpha(t)}$

olduğundan α, M üzerinde bir geodezik eğridir.

7- $f: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x,y,z) \to f(x,y,z) = x_1 x_3 y_2 - x_2 y_1 z_3$$

fonksiyonunun tensör belirtmesi için 3-lineer olma özelliklerini sağlamalıdır. Yani

- $\forall x, x', y, z \in \mathbb{R}^3$ için

$$f(x+x', y, z) = f(x,y,z) + f(x',y,z)$$

- $\forall x, y, y', z \in \mathbb{R}^3$ için

$$f(x, y+y', z) = f(x,y,z) + f(x,y',z)$$

- $\forall x, y, z, z' \in \mathbb{R}^3$ için

$$f(x,y,z+z') = f(x,y,z) + f(x,y,z')$$

- $\forall x,y,z \in \mathbb{R}^3$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ için

$$f(\lambda x, y, z) = f(x, \lambda y, z) + f(x,y,\lambda z) = \lambda f(x,y,z).$$

Fakat $\exists\, x = (1,2,1)$, $y = (-1,1,4)$, $z = (1,2,3)$, $x' = (2,-2,4) \in \mathbb{R}^3$

$x + x' = (3,0,5)$ olmak üzere

$f(x+x', y, z) = 15$

$f(x,y,z) = 7$

$f(x',y,z) = 14$ $\Big\} \; f(x,y,z) + f(x',y,z) = 21$ dur ki

$f(x+x', y, z) \neq f(x,y,z) + f(x',y,z)$ dır. O halde

f bir tensör değildir.